

B

$$P_1'(z) = \frac{k P_1(z)}{1 + k P_1(z)}$$

$$\text{con } P_1(z) = \frac{e-1}{2(z-e)}$$

$$P_1'(z) = \frac{\frac{k(e-1)}{2(z-e)}}{1 + \frac{k(e-1)}{2(z-e)}} = \frac{k(e-1)}{2(z-e)} \cdot \frac{2(z-e)}{2(z-e) + k(e-1)} =$$

$$= \frac{k(e-1)}{k(e-1) + 2(z-e)}$$

$$P = P_1' P_2 \quad \text{con } P_2 = \frac{z-e}{z-0.5}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{k(e-1)(z-e)}{(k(e-1) + 2(z-e))(z-0.5)}$$

Scegliamo k in modo tale da avere un polo in $z=1$ (soddisfa le specifiche di asintotismo ma anche una delle condiz. di risposte piate):

$$\Rightarrow k(e-1) + 2(z-e) = ke - k + 2z - 2e = 2(z-1)$$

$$\Rightarrow ke - k - 2e = -2$$

$$k(e-1) = 2e - 2$$

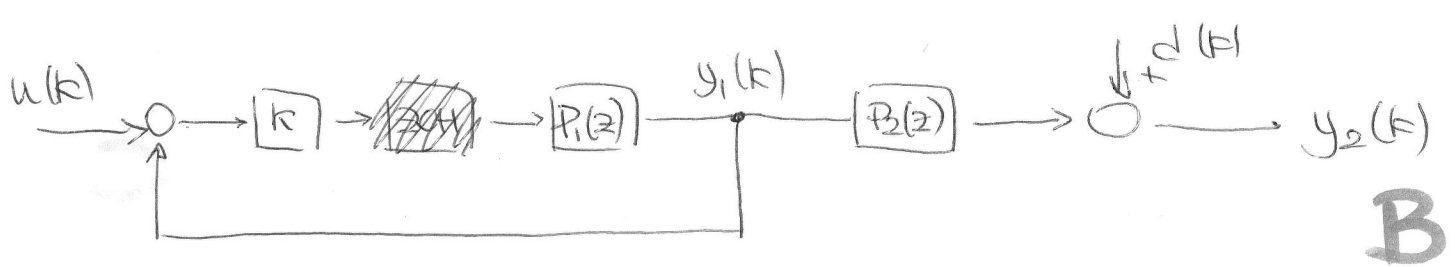
$$\Rightarrow k = \frac{2(e-1)}{(e-1)} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{k=2}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{2(e-1)(z-e)}{2(z-1)(z-0.5)} = \frac{(e-1)(z-e)}{(z-1)(z-0.5)}$$

N.B. La specifica 3 richiede un ulteriore polo in $z=1$ in modo da avere errore nullo per il termine di ingresso a rampa lineare)

$$\Rightarrow G(s) = \frac{R(z)}{z-1}$$



B

$$P_1'(z) = \frac{k P_1(z)}{1 + k P_1(z)}$$

$$\text{con } P_1(z) = \frac{e-1}{2(z-e)}$$

$$P_1'(z) = \frac{\frac{k(e-1)}{2(z-e)}}{1 + \frac{k(e-1)}{2(z-e)}} = \frac{k(e-1)}{2(z-e)} \cdot \frac{2(z-e)}{2(z-e) + k(e-1)} =$$

$$= \frac{k(e-1)}{k(e-1) + 2(z-e)}$$

$$P = P_1' P_2 \quad \text{con } P_2 = \frac{z-e}{z-0.5}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{k(e-1)(z-e)}{(k(e-1) + 2(z-e))(z-0.5)}$$

Scegliamo k in modo tale da avere un polo in $z=1$ (soddisfa le specifiche di asintotismo ma anche una delle condiz. di risposte piate):

$$\Rightarrow k(e-1) + 2(z-e) = ke - k + 2z - 2e = 2(z-1)$$

$$\Rightarrow ke - k - 2e = -2$$

$$k(e-1) = 2e - 2$$

$$\Rightarrow k = \frac{2(e-1)}{(e-1)} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{k=2}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{2(e-1)(z-e)}{2(z-1)(z-0.5)} = \frac{(e-1)(z-e)}{(z-1)(z-0.5)}$$

N.B. La specifica 3 richiede un ulteriore polo in $z=1$ in modo da avere errore nullo per il termine di ingresso a rampa lineare)

$$\Rightarrow G(s) = \frac{R(z)}{z-1}$$

Inoltre, occorre soddisfare la spec. di errore nullo per ingresso sinusoidale

$$\Rightarrow |We(e^{j3})| = |We(e^{j3})| = 0$$

$$We(z) = \frac{1}{1+GP} = \frac{D_G D_P}{D_G D_P + N_G N_P}$$

$D_G D_P$ deve annullarsi per $z = e^{\pm j3}$

$$\Rightarrow \text{deve contenere il termine } (z - e^{j3})(z - e^{-j3}) = z^2 - ze^{j3} - ze^{-j3} + 1 = z^2 - 2z \cos(3) + 1$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2 - 2z \cos(3))} \cdot R'(z)$$

$R'(z)$ deve essere scelto in modo t.c. si abbia risposte piatte nel più breve tempo possibile
 $k_{min} = m \rightarrow$ posso cancellare solo un polo di

$$P(z) \Rightarrow r=1$$

$$k = \begin{matrix} r & m & + & 1 \\ \parallel & \parallel & & \\ 1 & 2 & & \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{matrix} s > 1 \\ s < r \end{matrix} \right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} k = 4 \\ m + s = 4 \end{matrix} \right)$$

$$R'(z) = \frac{(z - 0.5)(az^3 + bz^2 + cz + d)}{z + f}$$

$$F(z) = G(z)P(z) = \frac{(z - 0.5)(az^3 + bz^2 + cz + d)}{(z-1)(z^2 - 2z \cos(3) + 1)(z+f)}$$

$$\frac{(e-1)(z-e)}{(z-1)(z-e^j3)} = \frac{(az^3 + bz^2 + cz + d)(e-1)(z-e)}{(z-1)^2(z^2 - 2z \cos(3) + 1)(z+f)}$$

$$N_F + D_F = z^5$$

Si ricavano i 5 parametri!

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2 - 2z \cos(\beta) + 1)} R(z)$$

$R(z)$ deve essere scelto in modo t.c. sia soddisfatte
la specifica 4 (risposta piatta nel più breve tempo possibile).

$$\Rightarrow R(z) = \frac{(z-0.5)(az^3 + bz^2 + cz + d)}{z + f}$$

Es. 17-02-2009

$T = 1s$

D



1. A.S.

y_1 e y_2 misurabili

2. $\varepsilon_{rp} = 0$ per ingressi a gradino

3. risposta piatta nel più breve tempo possibile

$$\frac{P_1(s)}{s} = \frac{1}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s-2)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s-2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s}$$

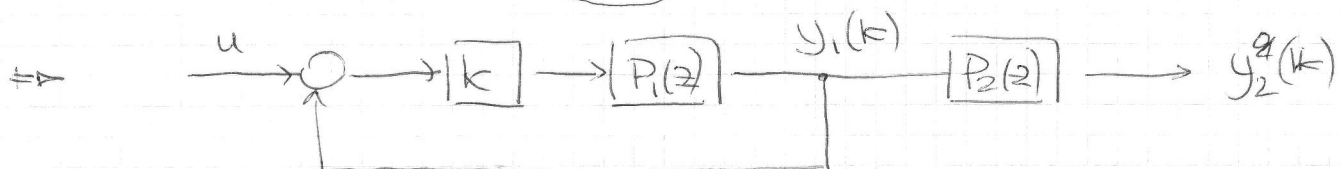
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)\bigg|_{t=kT} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2k}\right)\delta_{-1}(k)$$

$$z\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P_1(s)}{s}\right)\bigg|_{t=k}\right) = -\frac{1}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^2}$$

$$P_1(z) = \frac{z-1}{z} z\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P_1(s)}{s}\right)\bigg|_{t=k}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{z-1}{z-e^2} =$$

$$= \frac{-z + e^2 + z - 1}{2(z-e^2)} = \frac{e^2 - 1}{2(z-e^2)}$$

$$P(z) = P_1(z)P_2(z) = \frac{e^2 - 1}{2(z-e^2)} \cdot \frac{z-e^2}{z-2} \rightarrow \text{cancellazione di un polo instabile!}$$



$$P_1'(z) = \frac{k P_1(z)}{1 + k P_1(z)} = \frac{\frac{k(e^2-1)}{2(z-e^2)}}{1 + \frac{k(e^2-1)}{2(z-e^2)}} =$$

$$= k \frac{(e^2-1)}{2(z-e^2)} \cdot \frac{2(z-e^2)}{2(z-e^2) + k(e^2-1)} = \frac{k(e^2-1)}{2(z-e^2) + k(e^2-1)}$$

Determino k in modo tale da avere un polo in $z=1$:

$$2(z - e^2) + k(e^2 - 1) = 2(z - 1)$$

$$\rightarrow 2z - 2e^2 + ke^2 - k = 2z - 2$$

$$\Rightarrow k(e^2 - 1) = 2e^2 - 2 \quad \Rightarrow k = \frac{2(e^2 - 1)}{e^2 - 1} \quad k = 2$$

$$\Rightarrow P_1'(z) = \frac{2(e^2 - 1)}{2(z - 1)}$$

$$\Rightarrow P(z) = P_1'(z) P_2(z) = \frac{e^2 - 1}{(z - 1)} \cdot \frac{z - e^2}{(z - 2)} =$$

$$= \frac{(z - e^2)(e^2 - 1)}{(z - 1)(z - 2)}$$

Non posso cancellare alcuna dinamica di $P(z)$
Per verificare la specificazione di risposte piatte
si può sagliere

$$G(z) = \frac{1}{(e^2 - 1)} \frac{az + b}{z + c}$$

$$\Rightarrow F(z) = G(z)P(z) = \frac{(z - e^2)(az + b)}{(z - 1)(z - 2)(z + c)}$$

$$\Rightarrow \text{Impongo } NF + DF = z^3$$

$$(z - 1)(z - 2)(z + c) + (z - e^2)(az + b) = z^3$$

$$(z^2 - 3z + 2)(z + c) + (az^2 + bz - ae^2z - be^2) = z^3$$

$$z^3 + cz^2 - 3z^2 - 3cz + 2z + 2c + az^2 + bz - ae^2z - be^2 = z^3$$

$$\begin{cases} c - 3 + a \text{ ~~non~~ } = 0 \\ -3c + 2 + b - ae^2 = 0 \\ 2c - be^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Si ricavano } (a, b, c)$$

(F)

Es. data la seguente f.d.t. $P(s) = \frac{1}{s-2}$
progettare uno schema di controllo numerico
con $T=1s$ che verifichi le specifiche:

1. erp. per ingressi a rampa nullo
2. risposte piate nel più breve tempo possibile
3. A.S.

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s-2} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s-2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)_{t=kT=k} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2k}\right) \delta_{-1}(k)$$

$$\mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)\right)_{t=k} = -\frac{1}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^2}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{z-1}{2} \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)\right)_{t=k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{z-1}{z-e^2}$$

$$P(z) = \frac{-(z-e^2) + (z-1)}{2(z-e^2)} = \frac{-z+e^2+z-1}{2(z-e^2)} = \frac{e^2-1}{2(z-e^2)}$$

$$\text{Spec. 1} \rightarrow \text{Sistema tipo 2} \Rightarrow G(z) = \frac{(az^2+bz+c)}{(z-1)^2}$$

$$F(z) = G(z)P(z) = \frac{(az^2+bz+c)(e^2-1)}{2(z-1)^2(z-e^2)} = \alpha$$

$$NF(z) + D_F(z) = z^3$$

$$\Rightarrow (z^2 - 2z + 1)(z-e^2) + \alpha az^2 + \alpha bz + \alpha c = z^3$$

$$z^3 - 2z^2 + z - z^2e^2 + 2e^2z - e^2 + \alpha az^2 + \alpha bz + \alpha c = z^3$$

$$\begin{cases} -2 - e^2 + \alpha a = 0 \\ 1 + 2e^2 + \alpha b = 0 \\ -e^2 + \alpha c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\alpha} (2 + e^2) \\ b = \frac{1}{\alpha} (-1 - 2e^2) \\ c = \frac{e^2}{\alpha} \end{cases}$$



ES.

Dato $P(s) = \frac{1}{(s+2)}$

- e.r.p. = 0 per $d(k)$ costante
- e.r.p. = 0 per $u(k) = 14\sin(3k) + 27\cos(3k)$
- risposta piatta

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right) \Big|_{t=kT} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{kT}$$

$$z\left[\mathcal{L}^{-1}\dots\right] = \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{2T}}$$

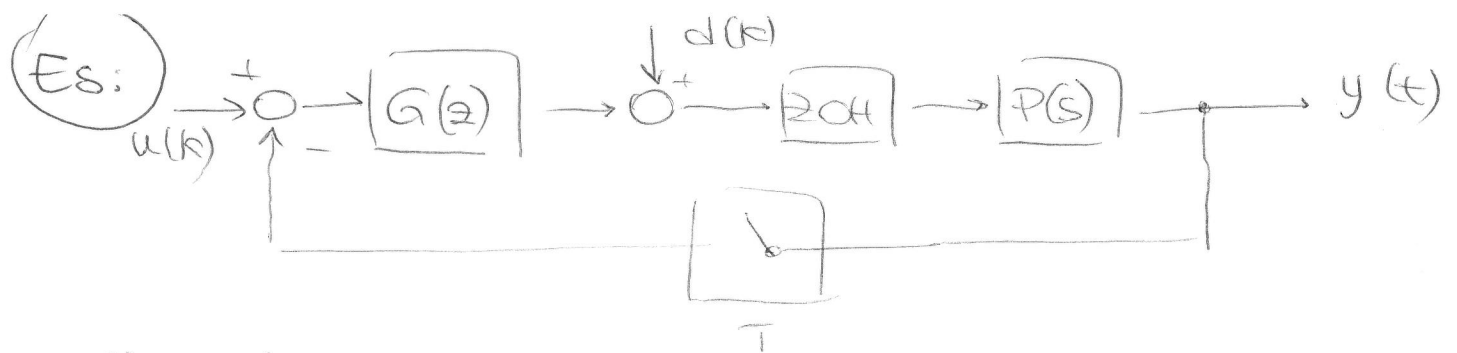
$$P(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{z-1}{z-e^{2T}} = \frac{z-e^{2T}-z+1}{2(z-e^{2T})} = \frac{\alpha}{z-e^{2T}}$$

$$\alpha = \frac{1-e^{2T}}{2}$$

$$G(z) = \frac{R(z)}{(z-1)} \rightarrow |We(e^{j3})| = |We(e^{-j3})| = 0$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{R'(z)}{(z-1)(z^2 - 2z\cos(3) + 1)}$$

$$R'(z) =$$



$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{Det. } G(z) \text{ t.c.}$$

1. errore nullo al regime permanente per un disturbo $d(k)$ costante
2. errore nullo al reg. perm. per un'ingresso $u(k) = \sin(4k)$
3. risposta al tempo finito nel più breve tempo possibile.

Calcoliamo $P(z)$:

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \left. \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=0} = 1$$

$$B = \left. \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=-1} = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} = (1 - e^{-kT}) \delta_{-1}(kT) = y(t) \Big|_{t=kT}$$

$$\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z}{z-e^{-T}} = \frac{z}{z-1} + \frac{-z}{z-e^{-T}} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-T}}$$

$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad \text{con } U(z) = 1, \quad P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Y(z) \cdot \frac{(z-1)}{z}$$

$$P(z) = 1 + \frac{-z}{(z-e^{-T})} \cdot \frac{(z-1)}{z} = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-T}} =$$

$$= \frac{z-e^{-T}-z+1}{z-e^{-T}} = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} = \frac{1-\alpha}{z-\alpha}$$

$$\alpha = e^{-T} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{z-\alpha} \quad \text{con } \alpha = 1 - e^{-T}$$

Spec. 1 \rightarrow (Astaticismo rispetto a disturbi costanti)

Polo in $z=1$ al numeratore del disturbo $d(k)$

$$G(z) = \frac{1}{z-1} G'(z) \quad \rightarrow \rightarrow (z-e^{-j4})(z-e^{j4})$$

Spec. 2 $\rightarrow \quad |W(e^{j4})| = |W(e^{-j4})| = 0$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2 - (2\cos 4)z + 1)} R(z) \quad [\text{vedi pag. 10/B}]$$

Spec. 3 \rightarrow Salto di $R(z)$

$R(z)$: polinomio di grado 3 \swarrow cancellazioni

$$\Rightarrow R(z) = (az^2 + bz + c)(z - e^{-T})$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = \frac{(az^2 + bz + c)(z - e^{-T})}{(z-1)(z^2 - (2\cos 4)z + 1)} \cdot \frac{\alpha}{(z - e^{-T})}$$

Oss: Lo f.d.t. di errore $W_e(z)$ ha tutti i poli coincidenti
nel p.to $z=0$. (e al p.c. il polo in $z=1$)

$$\Rightarrow F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} \quad \text{e} \quad W_e(z) = \frac{1}{1+F(z)} = \frac{D_F}{D_F + N_F}$$

$$[1 + F(z)] = z^3 \quad 1 + \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = \frac{D_F(z) + N_F(z)}{D_F(z)} = z^3$$

$$\Rightarrow D_F(z) + N_F(z) = z^3 - 2\cos 4 z^2 + z - z^2 + 2\cos 4 z +$$
$$-1 + \alpha a z^2 + \alpha b z + \alpha c = z^3$$

$$-2\cos 4 - 1 + \alpha a = 0$$

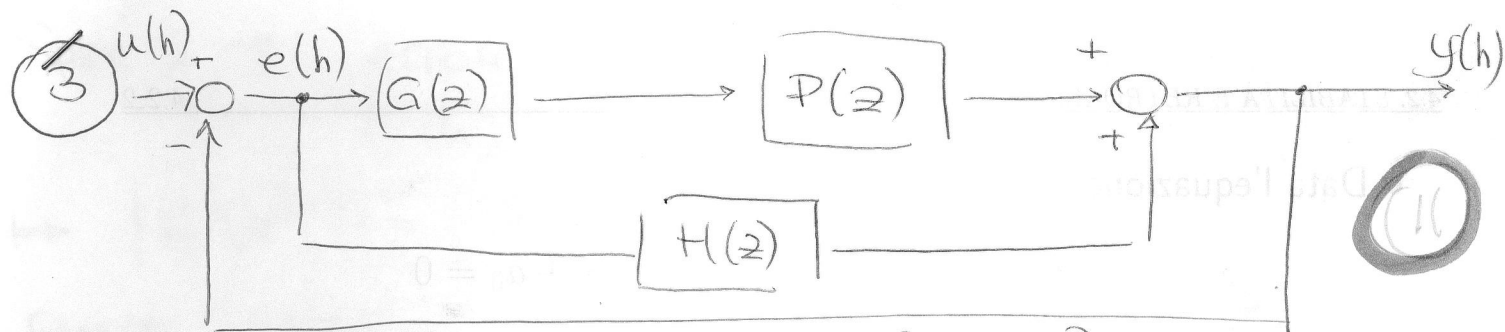
$$1 + 2\cos 4 + \alpha b = 0$$

$$\alpha c - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1 + 2\cos 4}{1 + 2\cos 4}$$

$$\Rightarrow b = \frac{-(1 + 2\cos 4)}{\alpha}$$

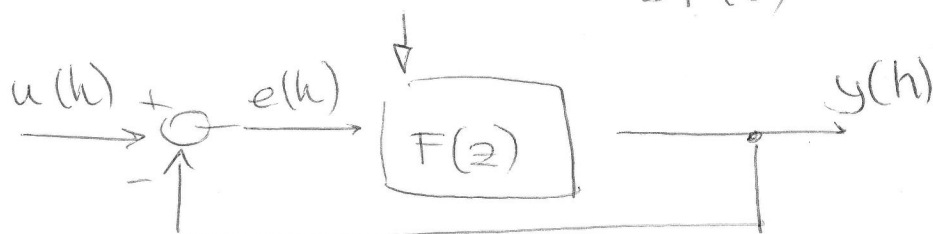
$$\Rightarrow c = 1/\alpha$$



Det. $G(z)$ affinché: $P(z) = \frac{(z+0.5)}{(z-1)(z-0.5)}$ $H(z) = \frac{1}{z}$

- 1) eccitando il sistema con un ingresso a gradino $u(h) = \delta_-(h)$, l'errore $e(h) = 0 \quad \forall h \geq l$ con l il più piccolo possibile;
- 2) l'errore $e(h)$ in regime permanente, in corrispondenza all'ingresso $u(h) = \sin(4h)$ sia nullo
- 3) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

$$F(z) = P(z)G(z) + H(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)}$$



F.d.t. di errore:

$$W_e(z) = \frac{e(z)}{u(z)} = \frac{1}{1 + F(z)} = \frac{1}{1 + \frac{N_F(z)}{D_F(z)}} = \frac{D_F(z)}{D_F(z) + N_F(z)}$$

Spec. 1 \rightarrow Già soddisfatto perché il sistema è più di tipo 1, per la presenza del polo in $z = 1$ in $P(z)$.



ec. 2 \rightarrow errore nullo ~~in~~ a r.p. per ingresso

$$u(k) = \sin(4k)$$

(12)

$$\Rightarrow |W(e^{j4})| = |W(e^{-j4})| = 0$$

Questo significa che, essendo $W(z) = \frac{D_F(z)}{N_F(z) + D_F(z)}$

$D_F(z)$ deve annullarsi in ~~z=1~~ $z = e^{\pm j4}$.

Cio' comporta che dovrà contenere il termine:

$$(z - e^{j4})(z - e^{-j4}) = z^2 - z e^{-j4} - z e^{j4} + 1 =$$
$$= z^2 - z(e^{-j4} + e^{j4}) + 1 = (*)$$

$$* e^{-j4} + e^{j4} = 2 \cos 4$$

$$\Rightarrow (*) = z^2 - 2z \cos 4 + 1$$

Spec. 1 $\rightarrow D_F(z)$ deve avere radice in $z=1$.

$$\text{Inoltre } N_F(z) + D_F(z) = z^l$$

$$\text{con } l = \text{grado}(D_F(z))$$

$$T(z) = P(z)G(z) + H(z) = \frac{(z+0.5)}{(z-1)(z-0.5)} \cdot \frac{N_G(z)}{D_G(z)} + \frac{1}{z} =$$
$$\left(\frac{z(z+0.5)N_G(z) + (z-1)(z-0.5)D_G(z)}{z(z-1)(z-0.5)D_G(z)} \right)$$

$$G(z) = \frac{(z-0.5)}{(z+0.5)} \cdot \frac{1}{z^2 - 2z \cos 4 + 1} \cdot R(z)$$

\hookrightarrow Stiamo cancellando le dinamiche stabili!

$R(z)$ di grado 2 (controllore proprio)

$$R(z) = az^2 + bz + c \quad F(z) = \frac{(z+0.5)}{(z-1)(z-0.5)}$$

(13)

$$F(z) = \frac{z(z+0.5)(z-0.5)(az^2+bz+c)}{z(z-1)(z-0.5)(z+0.5)(z^2-2z\cos 4+1)}$$

$$F(z) = \frac{z(z+0.5)(z-0.5)(az^2+bz+c)}{z(z-1)(z-0.5)(z+0.5)(z^2-2z\cos 4+1)}$$

$$F(z) = \frac{(z+0.5)}{(z-1)(z-0.5)} \frac{N_G(z)}{D_G(z)} + \frac{1}{z} \quad G(z) = \frac{z-0.5}{z+0.5}$$

$$= \frac{(z+0.5)(z-0.5)(az^2+bz+c)}{(z-1)(z-0.5)(z+0.5)(z^2-2z\cos 4+1)} + \frac{1}{z} =$$

$$= \frac{az^3+bz^2+cz + (z-1)(z^2-2z\cos 4+1)}{z(z-1)(z^2-2z\cos 4+1)}$$

$$N_F(z) + D_F(z) = z^4$$

$$az^3+bz^2+cz + z^3 - 2z^2\cos 4 + z - z^2 + 2z\cos 4 - 1 + z^4 - 2z^3\cos 4 + z^2 - z^3 + 2z^2\cos 4 - z = z^4$$

Questa identità polinomiale non è possibile

Scegliamo quindi $R(z) = \frac{bz^3+cz^2+dz+e}{z+a}$

$$F(z) = \frac{(z+0.5)}{(z-1)(z-0.5)} \cdot \frac{(z-0.5)(bz^3+cz^2+dz+e)}{(z+0.5)(z^2-2z\cos 4+1)(z+a)} + \frac{1}{z}$$

$$= \frac{bz^4+cz^3+dz^2+ez + (z-1)(z^2-2z\cos 4+1)(z+a)}{z(z-1)(z^2-2z\cos 4+1)(z+a)}$$

$$z^4 + cz^3 + dz^2 + ez + (z^2 + az - z - a)(z^2 - 2z\cos 4 + 1) + (z^2 - z)(z + a)(z^2 - 2z\cos 4 + 1) =$$

14

$$= bz^4 + cz^3 + dz^2 + (ez) + z^4 - 2z^3\cos 4 + z^2 + az^3 - 2az^2\cos 4 + az - z^3 - 2z^2\cos 4 + z - az^2 - 2az\cos 4 - a + z^5 - 2z^4\cos 4 + z^3 + az^4 - 2az^3\cos 4 + az^2 - z^4 + 2z^3\cos 4 - z^2 - az^3 + 2az^2\cos 4 - az = z^5$$

$$\begin{cases} b + 1 - 2\cos 4 + a - 1 = 0 \\ c - 2a\cos 4 = 0 \\ d - 2\cos 4 = 0 \\ e - 1 = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2\cos 4 \\ c = 0 \\ d = 2\cos 4 \\ e = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{\min} = 5}$$

Stabilität für $\lambda = 0$

$$(z^3 + az^2 - z^2 - az)(z^2 - 2z\cos 4 + 1) = z^5 - 2z^4\cos 4 + z^3 + az^4 - 2az^3\cos 4 + ez^2 + z^4 + 2z^3\cos 4 - z^2 - az^3 + 2az^2\cos 4 - az$$

Es) Si consideri $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ | Si vuole ottenere sistema con risposte piatte per variazioni e gradienti dell'ingresso.

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} \right] \Big|_{t=kT} =$$

$$= (At + B + Ce^{-t}) \delta_{-1}(t) \Big|_{t=kT}$$

con $A = s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \Big|_{s=0} = 1$

$$B = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2(s+1)} \right) \Big|_{s=0} = - \frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = -1$$

$$C = (s+1) \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} = (t - 1 + e^{-t}) \delta_{-1}(t) \Big|_{t=kT} =$$

$$= (kT - 1 + e^{-kT}) \delta_{-1}(kT)$$

$$z \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right] = \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$P(z) = \frac{z-1}{z} \cdot z \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right] =$$

$$= \frac{T}{(z-1)} - 1 + \frac{(z-1)}{z-e^{-T}} = \frac{T(z-e^{-T}) - (z-1)(z-e^{-T}) + (z-1)^2}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$= \frac{Tz - Te^{-T} - (z^2 - 2ze^{-T} - z + e^{-T}) + z^2 - 2z + 1}{(z-1)(z-e^{-T})} =$$

$$= \frac{Tz - Te^{-T} - \cancel{z^2} + 2e^{-T}z + z - e^{-T} + \cancel{z^2} - 2z + 1}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$= \frac{(T + e^{-T} - 1)z + (-Te^{-T} - e^{-T} + 1)}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

Supponendo $T = 1s$, $k_d = 1 e 20H$: $e^{-1} = 0.37$
 $0.37z - 0.73 + 1$
 $0.37z - 1.73$

$$P(z) = \frac{e^{-1}z - 2e^{-1} + 1}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

$$= \frac{0.37(z + 0.72)}{(z-1)(z-0.37)}$$

Per avere risposta
piatta lo zero
non si può cancellare

La f.d.t. ha 2 poli, di cui uno in $z = 1$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{(z - 0.37) d_0}{z + c_0}$$

$$G(z) = d_0 b_0$$

$$d_0 = \frac{1}{b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}}$$

$$(z + c_0)(z - 1) + 0.37(z + 0.72) = z^2$$

$$z^2 - z + c_0 z - c_0 + 0.37z + 0.27 = z^2$$

$$c_0 - 1 + 0.37 = 0$$

$$(2 + c_0)(z - 1) + (0.37)(z + 0.72) \cdot d_0 = z^2$$

$$\underbrace{z^2 - z + c_0 z - c_0}_{\times} + \underbrace{0.37 d_0 z + 0.27 d_0}_{\times} = z^2$$

$$\begin{cases} -1 + c_0 + 0.37 d_0 = 0 \\ -c_0 + 0.27 d_0 = 0 \end{cases}$$

(18)

$$-1 + 0.64 d_0 = 0 \quad 0.64 d_0 = 1$$

$$d_0 = \frac{1}{0.64} \approx 1.56$$

$$c_0 = 0.27 d_0 \approx 0.42$$

n = grado denominatore di $P(z) = z$

m = grado parte ^{den}causale di $P(z) = 1$

$r = n - m - 1$ (perché den $P(z)$ contiene fattore $z - 1$)

$$\Rightarrow l_{\min} = n + r = 2 + (2 - 1 - 1) = 2 \quad \underline{\text{ok!}}$$

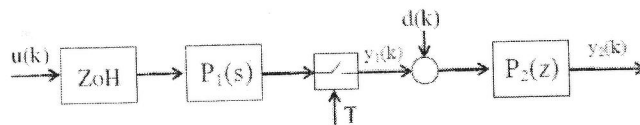
L'uscita continua diventa piatta e assume il valore desiderato unitario ($k_d = 1$) a partire da $2T = 2s$ con $u(k \geq k) = 0$

$$k = (n - m) + m_p = 1 + 1 = 2$$



zeri a fase
non minima

Esercizio 3 - Si consideri il seguente sistema:

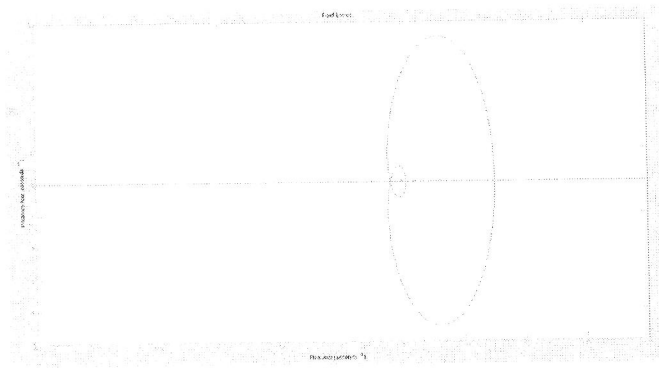


dove ZoH è un organo di tenuta di ordine zero, il passo di campionamento è $T = 0.2s$, le grandezze y_1 e y_2 sono misurabili, $P_1(s) = \frac{1}{s-5}$ e $P_2(z) = \frac{z-c}{7z+2}$. Si progetti uno schema di controllo tale che vengano soddisfatte le seguenti specifiche:

1. il sistema sia asintoticamente stabile;
2. errore nullo a regime permanente per un disturbo $d(k)$ costante;
3. errore nullo a regime permanente per un ingresso $u(k) = \sin(4k) + 27\cos(4k)$;
4. risposta piatta nel più breve tempo possibile.

Lo studente illustri le risposte ai diversi punti, descrivendo con chiarezza gli argomenti utilizzati e il metodo adottato. Una soluzione senza spiegazioni non potrà essere presa in considerazione.

Tempo : 2h : 30m, libri chiusi.



Soluzione Esercizio 3 - Come primo passaggio si calcola la $P_1(z)$ come segue:

- Calcolo $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right)_{t=kT} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-\frac{1}{5}}{s} + \frac{\frac{1}{5}}{s-5} \right)_{t=kT} = \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}e^k \right) \delta_{-1} \left(\frac{k}{5} \right)$
 - Calcolo $\mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right)_{t=kT} \right] = -\frac{1}{5} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{5} \frac{-z}{z-e}$
 - Calcolo infine
- $$P(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right)_{t=kT} \right] = \frac{e-1}{5(z-e)} = \frac{\alpha}{z-e} \quad (1)$$

con $\alpha = \frac{e-1}{5}$. L'interconnessione dei processi $P_1(z)$ e $P_2(z)$ causa una cancellazione di una dinamica instabile $z=e$ che pertanto non verifica la condizione 1. Per questa ragione conviene fare un primo feedback su $P_1(z)$ che è lecito visto che y_1 è misurabile. Dunque si ottiene:

$$W_1(z) = \frac{kP_1(z)}{1+kP_1(z)}$$

Inoltre conviene scegliere k in modo da avere $z-e+\alpha k = z-1$, cioè $k=5$ ottenendo

$$W_1(z) = \frac{e-1}{z-1}$$

in modo che possiamo ottenere un controllore per avere risposta piatta in tempo minimo. Il processo ottenuto è

$$P(z) = W_1(z)P_2(z) \frac{(e-1)(z-e)}{(z-1)(7z+2)},$$

Per soddisfare le specifiche richieste, $F(z)$ deve avere un polo in $z=1$ in modo da avere astatismo per $d(k)$ costanti, che però è già presente. Inoltre, per annullare l'errore a regime della parte sinusoidale e cosinusoidale dell'ingresso, va imposto $|W_e(e^{j4})| = |W_e(e^{-j4})| = 0$. Alla luce di questo e del fatto che il polo di $P(z)$ è interno al cerchio unitario e quindi relativo ad una dinamica stabile, scelgo:

$$G(z) = \frac{(7z+2)(az^2+bz+c)}{(z^2-(2\cos 4)z+1)(z+d)}. \quad (2)$$

Si ottiene:

$$F(z) = \frac{\beta(z-e)(az^2+bz+c)}{(z-1)(z^2-(2\cos 4)z+1)(z+d)} \quad (3)$$

dove $\beta = e-1$, che rappresenta la funzione di trasferimento sul ramo diretto. Imponendo $N_F + D_F = z^4$ si ha:

$$\begin{cases} a\beta + d = 1 + 2\cos 4 \\ -a\beta e + b\beta + d(-1 - 2\cos 4) = -1 - 2\cos 4 \\ -b\beta e + c\beta + d(1 + 2\cos 4) = 1 \\ -c\beta e - d = 0 \end{cases} \quad (4)$$

e si ottengono i seguenti parametri

$$a = -0.1453 \quad b = -0.2058 \quad c = 0.0123 \quad d = -0.0577.$$